

Isomorfismos lineares

Álgebra Linear – Videoaula 14

Luiz Gustavo Cordeiro



Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Uma função $f: X \rightarrow Y$ é **bijetiva** se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Equivalentemente, existe uma (única) função $f^{-1}: Y \rightarrow X$ que satisfaz

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$$

i.e.,

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

para todos $x \in X$ e $y \in Y$.

A função f^{-1} é chamada de **inversa** (bilateral) de f .

Teorema

Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear que é bijetiva como função. Então a inversa $T^{-1}: W \rightarrow V$ é linear e bijetiva.

Como T é injetiva, então admite uma inversa linear S à esquerda:

$$ST = \text{id}_V$$

Compondo ambos os lados à direita com T^{-1} ,

$$STT^{-1} = \text{id}_V \circ T^{-1}$$

$$S \text{id}_W = T^{-1}$$

$$S = T^{-1},$$

ou seja, $T^{-1} = S$, que é linear por construção.



Definição

Um **isomorfismo linear** entre dois espaços vetoriais é uma transformação linear bijetiva $T: V \rightarrow W$. Neste caso, dizemos que V e W são **isomorfos**.



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Teorema

Sejam $T: V \rightarrow W$ um isomorfismo linear e $A \subseteq V$. Então

- A é gerador para V se, e somente se, $T(A)$ é gerador para W .
- A é LI (em V) se, e somente se, $T(A)$ é LI (em W).
- A é base para V se, e somente se, $T(A)$ é base para W .

(Analogamente para imagens inversas.)

Como T e T^{-1} são sobrejetivas,

$$A \text{ gerador} \Rightarrow T(A) \text{ gerador} \Rightarrow T^{-1}(T(A)) = A \text{ gerador},$$

ou seja, A é gerador se, e somente se, $T(A)$ é gerador.

Similarmente, como T e T^{-1} são injetivas,

$$A \text{ é LI} \iff T(A) \text{ é LI.}$$

O terceiro item segue dos dois anteriores.

Teorema

Dois espaços vetoriais V e W são isomorfos se, e somente se, $\dim(V) = \dim(W)$

Se $T: V \rightarrow W$ é isomorfismo e \mathcal{B} é base de V , então $T(\mathcal{B})$ é base de W . Como T é injetiva, $\#T(\mathcal{B}) = \#\mathcal{B}$. Assim,

$$\dim(V) = \#\mathcal{B} = \#T(\mathcal{B}) = \dim(W)$$

Corolário

Se V tem dimensão finita e $E \subseteq V$ é subespaço isomorfo a V , então $E = V$.

Isomorfismos e dimensão

Se $\dim(V) = \dim(W)$, digamos $\dim(V) = \dim(W) = n$. Tome bases

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad \mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$$

de V e W , respectivamente. Defina $T: V \rightarrow W$ e $S: W \rightarrow V$ nas bases como

$$T(v_i) = w_i \quad \text{e} \quad S(w_i) = v_i.$$

para todo i . Então

$$ST(v_i) = S(w_i) = v_i$$

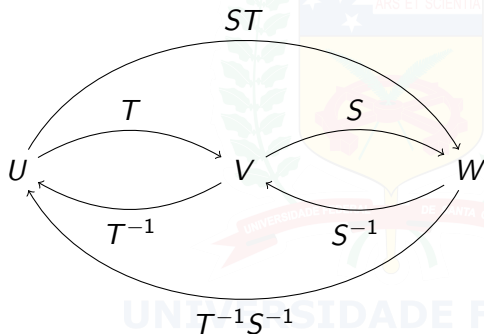
para todo i . Ou seja, ST coincide com id_V na base \mathcal{B} , logo $ST = \text{id}_V$.
Similarmente, $TS = \text{id}_W$.

Portanto, T é inversível, ou seja, bijetiva, logo um isomorfismo.

Isomorfismos e composição

IMPORTANTE

Se $T: U \rightarrow V$ e $S: V \rightarrow W$ são isomorfismos, então $ST: U \rightarrow W$ é isomorfismo e $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.



Isomorfismos em espaços de transformações

Seja $U: V \rightarrow W$ isomorfismo.

Considere os espaços vetoriais $L(V, V)$ e $L(W, W)$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{U^{-1}} & W \\ \downarrow f & & \downarrow UfU^{-1} \\ V & \xrightarrow{U} & W \end{array}$$

A função

$$\text{cn}_U: L(V, V) \rightarrow L(W, W), \quad \text{cn}_U(f) = UfU^{-1}$$

é um isomorfismo linear.

Isomorfismos em espaços de transformações

$$\begin{aligned} \text{cn}_U(f + \lambda g) &= U(f + \lambda g)U^{-1} \\ &= UfU^{-1} + \lambda UgU^{-1} \\ &= \text{cn}_U(f) + \lambda \text{cn}_U(g) \end{aligned}$$

Para toda $f \in L(V, V)$

$$\begin{aligned} \text{cn}_{U^{-1}}(\text{cn}_U(f)) &= U^{-1}(\text{cn}_U(f))(U^{-1})^{-1} \\ &= U^{-1}UfU^{-1}(U^{-1})^{-1} \\ &= f \end{aligned}$$

e similarmente $\text{cn}_U(\text{cn}_{U^{-1}}(g)) = g$ para todo $g \in L(W, W)$. Logo $\text{cn}_{U^{-1}}$ é a inversa de cn_U .

Injetividade, sobrejetividade e bijetividade na mesma dimensão

Teorema

Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear entre espaços *de mesma dimensão finita*.

Então são equivalentes:

- T é injetiva.
- T é sobrejetiva.
- T é bijetiva.

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem,

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{im}(T))$$

e como $\dim(W) = \dim(V)$,

$$\dim(W) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{im}(T))$$

Injetividade, sobrejetividade e bijetividade na mesma dimensão

$$\dim(W) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{im}(T))$$

logo

$$\begin{aligned} T \text{ injetiva} &\iff \ker(T) = \{0_V\} \\ &\iff \dim(\ker(T)) = 0 \\ &\iff \dim(\text{im}(T)) = \dim(W) \\ &\iff \text{im}(T) = W \\ &\iff T \text{ sobrejetiva} \end{aligned}$$

Exemplos

A função

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n \times 1} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

é um isomorfismo linear.



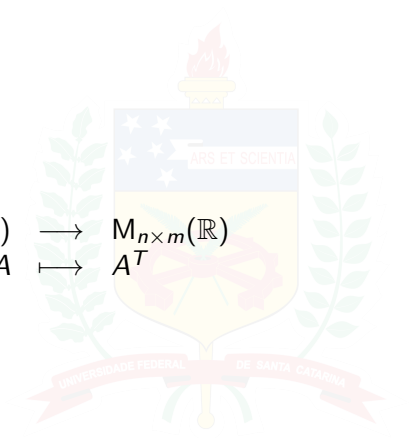
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Exemplos

A função

$$\begin{array}{ccc} M_{m \times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{n \times m}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{array}$$

é um isomorfismo linear.



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Exemplos

Se V e W são espaços vetoriais, então o produto

$$V \times W$$

é um espaço vetorial, e possui os subespaços

$$V \times \{0_W\} \quad \text{e} \quad \{0_V\} \times W.$$

As funções

$$L: V \rightarrow (V \times \{0_W\}), \quad L(v) = (v, 0_W)$$

e

$$R: W \rightarrow (\{0_V\} \times W), \quad R(w) = (0_V, w)$$

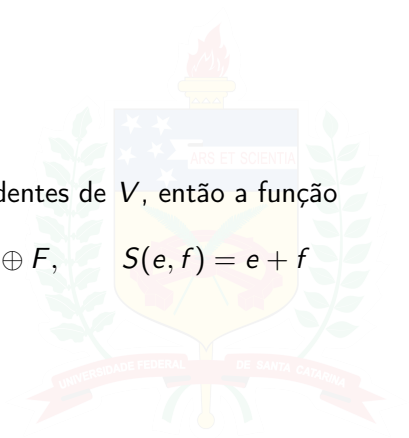
são isomorfismos.

Exemplos

Se E, F são subespaços independentes de V , então a função

$$S: E \times F \rightarrow E \oplus F, \quad S(e, f) = e + f$$

é um isomorfismo.



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Um pouco de cuidado em dimensão infinita

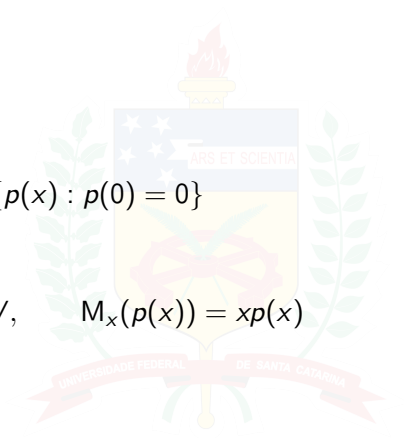
O subespaço

$$W = \{p(x) : p(0) = 0\}$$

de $\mathbb{R}[x]$ é próprio, mas

$$M_x: \mathbb{R}[x] \rightarrow W, \quad M_x(p(x)) = xp(x)$$

é um isomorfismo.



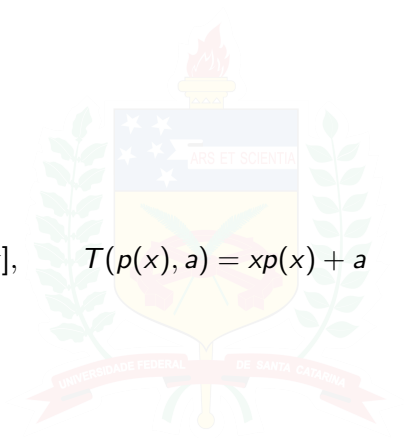
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Mais cuidado em dimensão infinita

A função

$$T: \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}[x], \quad T(p(x), a) = xp(x) + a$$

é um isomorfismo.



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Bastante cuidado em dimensão infinita

A função

$$Q: \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x], \quad Q(p(x), q(x)) = p(x^2) + xq(x^2)$$

é um isomorfismo.

Se comparássemos dimensões (de modo ingênuo):

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]) &= \dim(\mathbb{R}[x]) \\ \dim(\mathbb{R}[x]) + \dim(\mathbb{R}[x]) &= \dim(\mathbb{R}[x]) \\ \infty + \infty &= \infty \end{aligned}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA