Isomorfismos lineares

Álgebra Linear – Videoaula 14

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Bijeções

Uma função $f\colon X \to Y$ é **bijetiva** se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Equivalentemente, existe uma (única) função $f^{-1}\colon Y \to X$ que satisfaz

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{e} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$$

i.e.,

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{e} \qquad f(f^{-1}(y)) = y$$

para todos $x \in X$ e $y \in Y$.

A função f^{-1} é chamada de **inversa** (bilateral) de f.

Isomorfismos lineares

Teorema

Seja $T\colon V \to W$ uma transformação linear que é bijetiva como função. Então a inversa $T^{-1}\colon W \to V$ é linear e bijetiva.

Como T é injetiva, então admite uma inversa linear S à esquerda:

$$ST = \mathrm{id}_V$$

Compondo ambos os lados à direita com T^{-1},

$$\begin{aligned} STT^{-1} &= \mathrm{id}_V \circ T^{-1} \\ S\,\mathrm{id}_W &= T^{-1} \\ S &= T^{-1}, \end{aligned}$$

ou seja, $T^{-1} = S$, que é linear por construção.

Isomorfismos lineares

Definição

Um **isomorfismo linear** entre dois espaços vetoriais é uma transformação linear bijetiva $T\colon V \to W$. Neste caso, dizemos que V e W são **isomorfos**.

Isomorfismos, geradores e bases

Teorema

Sejam $T: V \to W$ um isomorfismo linear e $A \subseteq V$. Então

- *A é gerador para V se, e somente se, $T(A)$ é gerador para W.*
- *A é LI (em V) se, e somente se, $T(A)$ é LI (em W).*
- *A é base para V se, e somente se, $T(A)$ é base para W.*

(Analogamente para imagens inversas.)

Como T e T^{-1} são sobrejetivas,

$$A \text{ gerador} \Rightarrow T(A) \text{ gerador} \Rightarrow T^{-1}(T(A)) = A \text{ gerador},$$

ou seja, A é gerador se, e somente se, $T(A)$ é gerador.

Similarmente, como T e T^{-1} são injetivas,

$$A \text{ é LI} \iff T(A) \text{ é LI}.$$

O terceiro item segue dos dois anteriores.

Isomorfismos e dimensão

Teorema

Dois espaços vetoriais V e W são isomorfos se, e somente se, $\dim(V) = \dim(W)$

Se $T\colon V \to W$ é isomorfismo e $\mathcal{B}$ é base de V, então $T(\mathcal{B})$ é base de W. Como T é injetiva, $\#T(\mathcal{B}) = \#\mathcal{B}$. Assim,

$$\dim(V) = \#\mathcal{B} = \#T(\mathcal{B}) = \dim(W)$$

Corolário

Se V tem dimensão finita e $E \subseteq V$ é subespaço isomorfo a V, então $E = V$.

Isomorfismos e dimensão

Se $\dim(V) = \dim(W)$, digamos $\dim(V) = \dim(W) = n$. Tome bases

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}, \qquad \mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$$

de V e W, respectivamente. Defina $T\colon V \to W$ e $S\colon W \to V$ nas bases como

$$T(v_i) = w_i \qquad \text{e} \qquad S(w_i) = v_i.$$

para todo i. Então

$$ST(v_i) = S(w_i) = v_i$$

para todo i. Ou seja, ST coincide com id_V na base $\mathcal{B}$, logo $ST = \mathrm{id}_V$. Similarmente, $TS = \mathrm{id}_W$.

Portanto, T é inversível, ou seja, bijetiva, logo um isomorfismo.

Isomorfismos e composição
IMPORTANTE

Se $T\colon U \to V$ e $S\colon V \to W$ são isomorfismos, então $ST\colon U \to W$ é isomorfismo e $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, bend left, "T"] \arrow[rr, bend left=60, "ST"] & V \arrow[l, bend left, "T^{-1}"] \arrow[r, bend left, "S"] & W \arrow[l, bend left, "S^{-1}"] \arrow[ll, bend left=60, "T^{-1}S^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Isomorfismos em espaços de transformações

Seja $U\colon V \to W$ isomorfismo.
Considere os espaços vetoriais $L(V, V)$ e $L(W, W)$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "f"'] & W \arrow[l, "U^{-1}"'] \arrow[d, "UfU^{-1}"] \\ V \arrow[r, "U"'] & W \end{tikzcd}$$

A função

$$\mathrm{cn}_U\colon L(V, V) \to L(W, W), \qquad \mathrm{cn}_U(f) = UfU^{-1}$$

é um isomorfismo linear.

Isomorfismos em espaços de transformações

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cn}_U(f+\lambda g) &= U(f+\lambda g)U^{-1} \\
&= UfU^{-1} + \lambda UgU^{-1} \\
&= \mathrm{cn}_U(f) + \lambda\,\mathrm{cn}_U(g)
\end{aligned}
$$

Para toda $f \in \mathrm{L}(V, V)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cn}_{U^{-1}}(\mathrm{cn}_U(f)) &= U^{-1}(\mathrm{cn}_U(f))(U^{-1})^{-1} \\
&= U^{-1}UfU^{-1}(U^{-1})^{-1} \\
&= f
\end{aligned}
$$

e similarmente $\mathrm{cn}_U(\mathrm{cn}_{U^{-1}}(g)) = g$ para todo $g \in \mathrm{L}(W, W)$. Logo $\mathrm{cn}_{U^{-1}}$ é a inversa de cn_U.

Injetividade, sobrejetividade e bijetividade na mesma dimensão

Teorema

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre espaços de mesma dimensão finita.
Então são equivalentes:

- *T é injetiva.*
- *T é sobrejetiva.*
- *T é bijetiva.*

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem,

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{im}(T))$$

e como $\dim(W) = \dim(V)$,

$$\dim(W) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{im}(T))$$

Injetividade, sobrejetividade e bijetividade na mesma dimensão

$$\dim(W) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{im}(T))$$

logo

$$\begin{aligned} T \text{ injetiva} &\iff \ker(T) = \{0_V\} \\ &\iff \dim(\ker(T)) = 0 \\ &\iff \dim(\mathrm{im}(T)) = \dim(W) \\ &\iff \mathrm{im}(T) = W \\ &\iff T \text{ sobrejetiva} \end{aligned}$$

Exemplos

A função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n\times 1} \\ (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{array}$$

é um isomorfismo linear.

Exemplos

A função

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{array}$$

é um isomorfismo linear.

Exemplos

Se V e W são espaços vetoriais, então o produto

$$V \times W$$

é um espaço vetorial, e possui os subespaços

$$V \times \{0_W\} \qquad \text{e} \qquad \{0_V\} \times W.$$

As funções

$$L\colon V \to (V \times \{0_W\}), \qquad L(v) = (v, 0_W)$$

e

$$R\colon W \to (\{0_V\} \times W), \qquad R(w) = (0_V, w)$$

são isomorfismos.

Exemplos

Se E, F são subespaços independentes de V, então a função

$$S \colon E \times F \to E \oplus F, \qquad S(e,f) = e + f$$

é um isomorfismo.

Um pouco de cuidado em dimensão infinita

O subespaço

$$W = \{p(x) : p(0) = 0\}$$

de $\mathbb{R}[x]$ é próprio, mas

$$\mathrm{M}_x \colon \mathbb{R}[x] \to W, \qquad \mathrm{M}_x(p(x)) = xp(x)$$

é um isomorfismo.

Mais cuidado em dimensão infinita

A função

$$T\colon \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}[x], \qquad T(p(x), a) = xp(x) + a$$

é um isomorfismo.

Bastante cuidado em dimensão infinita

A função

$$Q\colon \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \qquad Q(p(x), q(x)) = p(x^2) + xq(x^2)$$

é um isomorfismo.

Se comparássemos dimensões (de modo ingênuo):

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]) &= \dim(\mathbb{R}[x]) \\ \dim(\mathbb{R}[x]) + \dim(\mathbb{R}[x]) &= \dim(\mathbb{R}[x]) \\ \infty + \infty &= \infty \end{aligned}$$